第 2 节 同角三角函数基本关系（★★）

内容提要

1．同角三角函数基本关系$\begin{cases}\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1\\ \tan\alpha=\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\end{cases}$ 主要用于$\sin\alpha$，$\cos\alpha$，$\tan\alpha$三者的知一求二，特别注意由$\sin^2\alpha=1-\cos^2\alpha$或$\cos^2\alpha=1-\sin^2\alpha$求$\sin\alpha$，$\cos\alpha$，开平方时需根据角$\alpha$所在的象限决定取正还是取负.

2．$\sin\alpha$，$\cos\alpha$的和、差、积的转化：

①$(\sin\alpha+\cos\alpha)^2=\sin^2\alpha+\cos^2\alpha+2\sin\alpha\cos\alpha=1+2\sin\alpha\cos\alpha=1+\sin2\alpha$；

②$(\sin\alpha-\cos\alpha)^2=\sin^2\alpha+\cos^2\alpha-2\sin\alpha\cos\alpha=1-2\sin\alpha\cos\alpha=1-\sin2\alpha$；

③$(\sin\alpha+\cos\alpha)^2+(\sin\alpha-\cos\alpha)^2=2$.

3．$\sin\alpha$，$\cos\alpha$的齐次分式化正切：

①计算$\dfrac{A\sin\alpha+B\cos\alpha}{C\sin\alpha+D\cos\alpha}$，可上下同除以$\cos\alpha$，化为$\dfrac{A\tan\alpha+B}{C\tan\alpha+D}$；

②计算$A\sin^2\alpha+B\sin\alpha\cos\alpha+C\cos^2\alpha$，可先凑分母，化为$\dfrac{A\sin^2\alpha+B\sin\alpha\cos\alpha+C\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha}$，再上下同除以$\cos^2\alpha$，化为$\dfrac{A\tan^2\alpha+B\tan\alpha+C}{\tan^2\alpha+1}$.

典型例题

类型Ⅰ：$\sin\alpha$，$\cos\alpha$，$\tan\alpha$的相互转换

【例 1】设$\cos\alpha=k(k\in\mathbf{R})$，$\alpha\in(\pi,\dfrac{3\pi}{2})$，则$\sin\alpha=$_____.（用 k 表示）

解析：由题意，$\sin^2\alpha=1-\cos^2\alpha=1-k^2$，又$\alpha\in(\pi,\dfrac{3\pi}{2})$，所以$\sin\alpha<0$，故$\sin\alpha=-\sqrt{1-k^2}$.

答案：$-\sqrt{1-k^2}$

【变式】已知$\dfrac{\pi}{2}<\theta<\dfrac{3\pi}{2}$，$2\sin\theta=1-\cos\theta$，则$\tan\theta=$（　　）

（A）0 或$-\dfrac{4}{3}$　（B）$-\dfrac{4}{3}$　（C）$-\dfrac{\sqrt{7}}{4}$　（D）$-\dfrac{\sqrt{7}}{4}$或 0

解析：给了一个$\sin\theta$和$\cos\theta$的方程，可结合$\sin^2\theta+\cos^2\theta=1$求出$\sin\theta$和$\cos\theta$，再求$\tan\theta$，

$\begin{cases}2\sin\theta=1-\cos\theta\\ \sin^2\theta+\cos^2\theta=1\end{cases}\Rightarrow\sin\theta=0$，$\cos\theta=1$或$\sin\theta=\dfrac{4}{5}$，$\cos\theta=-\dfrac{3}{5}$，

又$\dfrac{\pi}{2}<\theta<\dfrac{3\pi}{2}$，所以$\cos\theta<0$，从而$\sin\theta=\dfrac{4}{5}$，$\cos\theta=-\dfrac{3}{5}$，故$\tan\theta=\dfrac{\sin\theta}{\cos\theta}=-\dfrac{4}{3}$.

答案：B

【例 2】若 $\tan\alpha=\cos\alpha$，则 $\dfrac{1}{\sin\alpha}+\cos^4\alpha=$_____.

解析：先将已知的等式切化弦，$\tan\alpha=\cos\alpha\Rightarrow\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\cos\alpha\Rightarrow\sin\alpha=\cos^2\alpha$ ①，

将右侧的 $\cos^2\alpha$ 换成 $1-\sin^2\alpha$ 即可化同名，解出 $\sin\alpha$，

又 $\cos^2\alpha=1-\sin^2\alpha$，代入①可得 $\sin\alpha=1-\sin^2\alpha$，解得：$\sin\alpha=\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}$ 或 $-\dfrac{\sqrt{5}+1}{2}$（舍去），

既然有了 $\sin\alpha$，那么可将 $\dfrac{1}{\sin\alpha}+\cos^4\alpha$ 中的 $\cos^4\alpha$ 也化为 $\sin\alpha$，可用式①来化，

$$\frac{1}{\sin\alpha}+\cos^4\alpha=\frac{1}{\sin\alpha}+\sin^2\alpha=\frac{2}{\sqrt{5}-1}+(\frac{\sqrt{5}-1}{2})^2=\frac{\sqrt{5}+1}{2}+\frac{3-\sqrt{5}}{2}=2.$$

答案：2

【总结】等式 $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$ 沟通了正余弦，$\tan\alpha=\dfrac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$ 沟通了弦与切.

类型Ⅱ：$\sin\alpha+\cos\alpha$，$\sin\alpha-\cos\alpha$ 与 $\sin\alpha\cos\alpha$

【例 3】已知 $\alpha\in(0,\pi)$，$\sin\alpha+\cos\alpha=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$，则 $\sin2\alpha=$_____；$\cos2\alpha=$_____.

解析：若像例 1 的变式那样会发现计算较复杂，故用内容提要 2 的式子沟通 $\sin\alpha+\cos\alpha$ 与所求的量，

由内容提要 2，$(\sin\alpha+\cos\alpha)^2=1+\sin2\alpha$，所以 $\sin2\alpha=(\sin\alpha+\cos\alpha)^2-1=-\dfrac{2}{3}$ ①，

接下来若用 $\cos^2 2\alpha=1-\sin^2 2\alpha$ 求 $\cos2\alpha$，则开根时正负不好判断，故用 $\cos2\alpha=(\cos\alpha-\sin\alpha)(\cos\alpha+\sin\alpha)$ 来算，下面先求 $\cos\alpha-\sin\alpha$，需判断其正负，

由①知 $\sin2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha<0$，结合 $\alpha\in(0,\pi)$ 可得 $\sin\alpha>0$，$\cos\alpha<0$，所以 $\cos\alpha-\sin\alpha<0$，

又 $(\cos\alpha-\sin\alpha)^2=1-\sin2\alpha=1-(-\dfrac{2}{3})=\dfrac{5}{3}$，所以 $\cos\alpha-\sin\alpha=-\dfrac{\sqrt{15}}{3}$，

故 $\cos2\alpha=(\cos\alpha-\sin\alpha)(\cos\alpha+\sin\alpha)=-\dfrac{\sqrt{15}}{3}\times\dfrac{\sqrt{3}}{3}=-\dfrac{\sqrt{5}}{3}$.

答案：$-\dfrac{2}{3}$；$-\dfrac{\sqrt{5}}{3}$

【反思】已知 $\sin\alpha\pm\cos\alpha$ 的值，可将其平方，求得 $\sin2\alpha$ 的值，并由该值的正负来分析 α 的范围.

【变式】若 $x\in[0,\dfrac{\pi}{3}]$，则函数 $y=\sin x+\cos x-2\sin x\cos x$ 的最大值为（　　）

（A）1　　（B）$\sqrt{2}$　　（C）2　　（D）$\sqrt{2}+1$

解析：借助 $(\sin x+\cos x)^2=1+2\sin x\cos x$，将 $\sin x+\cos x$ 换元，可转化为二次函数求区间最值，

设 $t=\sin x+\cos x$，则 $t=\sqrt{2}\sin(x+\dfrac{\pi}{4})$，换元后，应研究新元的取值范围，

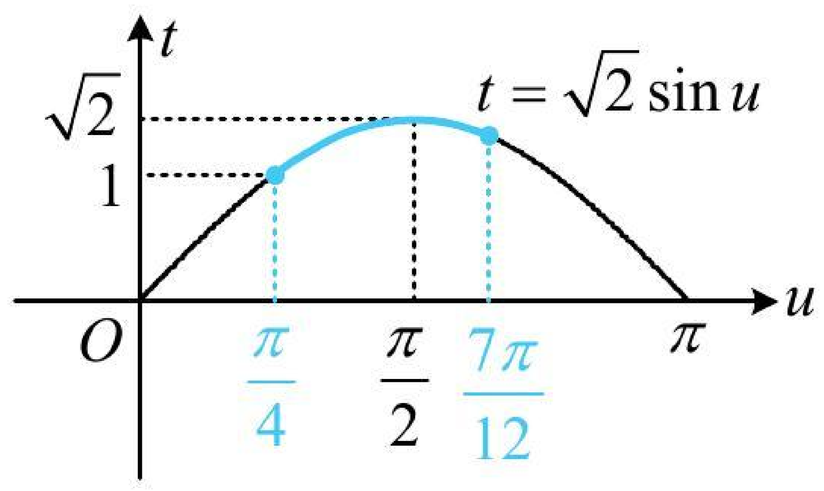
设$u=x+\dfrac{\pi}{4}$，则$t=\sqrt{2}\sin u$，当$x\in[0,\dfrac{\pi}{3}]$时，$u=x+\dfrac{\pi}{4}\in[\dfrac{\pi}{4},\dfrac{7\pi}{12}]$，

函数$t=\sqrt{2}\sin u$的部分图象如图所示，由图可知$t\in[1,\sqrt{2}]$，

又$t^2=(\sin x+\cos x)^2=1+2\sin x\cos x$，所以$2\sin x\cos x=t^2-1$，故$y=t-(t^2-1)=-t^2+t+1$，

因为二次函数$y=-t^2+t+1$在$[1,\sqrt{2}]$上↘，所以当$t=1$时，y取得最大值 1.

答案：A



【反思】看到$\sin x\pm\cos x$和$\sin x\cos x$出现在一个式子中，想到将$\sin x\pm\cos x$换元成t，并将其平方，可将$\sin x\cos x$也用t表示.

类型Ⅲ：$\sin\alpha$ 和 $\cos\alpha$ 的齐次分式化正切

【例 4】已知$\tan\alpha=2$，则$\dfrac{\sin\alpha-4\cos\alpha}{5\sin\alpha+2\cos\alpha}=$_____.

解析：已知正切，若先求$\sin\alpha$和$\cos\alpha$，则需讨论α在第一象限还是第三象限，较为繁琐，而我们要求值的式子是关于$\sin\alpha$和$\cos\alpha$的一次齐次分式，可上下同除以$\cos\alpha$直接化正切来计算，

由题意，$\dfrac{\sin\alpha-4\cos\alpha}{5\sin\alpha+2\cos\alpha}=\dfrac{\tan\alpha-4}{5\tan\alpha+2}=\dfrac{2-4}{5\times2+2}=-\dfrac{1}{6}$.

答案：$-\dfrac{1}{6}$

【反思】关于$\sin\alpha$和$\cos\alpha$的一次齐次分式，可上下同除以$\cos\alpha$化正切；从后面的几道题我们还会看到，只要是关于$\sin\alpha$和$\cos\alpha$齐次分式，都可以化正切.

【变式 1】已知$\sin\alpha+2\cos\alpha=0$，则$2\sin\alpha\cos\alpha-\cos^2\alpha$的值是_____.

解析：要求值的式子不是分式，但我们可以把它看成分母为 1 的分式$\dfrac{2\sin\alpha\cos\alpha-\cos^2\alpha}{1}$，并将 1 代换成$\sin^2\alpha+\cos^2\alpha$，这样就转化成了二次齐次分式，可上下同除以$\cos^2\alpha$化正切，

$\sin\alpha+2\cos\alpha=0\Rightarrow\tan\alpha=-2$，所以$2\sin\alpha\cos\alpha-\cos^2\alpha=\dfrac{2\sin\alpha\cos\alpha-\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha}=\dfrac{2\tan\alpha-1}{\tan^2\alpha+1}=-1$.

答案：-1

【变式 2】已知$\tan\theta=\dfrac{1}{2}$，则$\dfrac{\sin^3\theta+\sin\theta}{\cos^3\theta+\sin\theta\cos^2\theta}=$（　　）

（A）6　（B）$\frac{1}{6}$　（C）$\frac{1}{2}$　（D）2

解析：要求的式子的分子和分母表面上看不齐次，但只要把分子的一次项 $\sin\theta$ 看成 $\sin\theta\cdot 1$，再把 1 变成 $\sin^2\theta+\cos^2\theta$，就能转化为三次齐次分式，可以同除以 $\cos^3\theta$ 化正切计算，

$$\frac{\sin^3\theta+\sin\theta}{\cos^3\theta+\sin\theta\cos^2\theta}=\frac{\sin^3\theta+\sin\theta(\sin^2\theta+\cos^2\theta)}{\cos^3\theta+\sin\theta\cos^2\theta}=\frac{2\sin^3\theta+\sin\theta\cos^2\theta}{\cos^3\theta+\sin\theta\cos^2\theta}=\frac{2\tan^3\theta+\tan\theta}{1+\tan\theta}=\frac{2\times(\frac{1}{2})^3+\frac{1}{2}}{1+\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}.$$

答案：C

【反思】关于 $\sin\theta$ 和 $\cos\theta$ 的齐次分式才可以化正切，有的分式表面上看不是齐次的，但可以通过将 1 代换成 $\sin^2\theta+\cos^2\theta$ 来调整为齐次的.

【变式 3】若 $\alpha\in(\frac{\pi}{2},\pi)$，$2\sin\alpha+\cos\alpha=\frac{3\sqrt{5}}{5}$，则 $\tan\alpha=$（　　）

（A）-2　（B）2　（C）$\frac{2}{11}$　（D）$-\frac{2}{11}$

解法 1：给出了 $\sin\alpha$ 和 $\cos\alpha$ 的一个方程，可结合 $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$ 求出 $\sin\alpha$ 和 $\cos\alpha$，再求 $\tan\alpha$，

由 $2\sin\alpha+\cos\alpha=\frac{3\sqrt{5}}{5}$ 可得 $\cos\alpha=\frac{3\sqrt{5}}{5}-2\sin\alpha$，代入 $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$ 得：$\sin^2\alpha+(\frac{3\sqrt{5}}{5}-2\sin\alpha)^2=1$，

整理得：$25\sin^2\alpha-12\sqrt{5}\sin\alpha+4=0$，解得：$\sin\alpha=\frac{2\sqrt{5}}{25}$ 或 $\frac{2\sqrt{5}}{5}$，

当 $\sin\alpha=\frac{2\sqrt{5}}{25}$ 时，$\cos\alpha=\frac{3\sqrt{5}}{5}-2\sin\alpha=\frac{11\sqrt{5}}{25}$，因为 $\alpha\in(\frac{\pi}{2},\pi)$，所以 $\cos\alpha<0$，矛盾；

当 $\sin\alpha=\frac{2\sqrt{5}}{5}$ 时，$\cos\alpha=\frac{3\sqrt{5}}{5}-2\sin\alpha=-\frac{\sqrt{5}}{5}$，所以 $\tan\alpha=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=-2$.

解法 2：将已知的式子平方，左侧可化为关于 $\sin\alpha$ 和 $\cos\alpha$ 的二次齐次式，这种式子可直接化正切，

因为 $2\sin\alpha+\cos\alpha=\frac{3\sqrt{5}}{5}$，所以 $(2\sin\alpha+\cos\alpha)^2=4\sin^2\alpha+4\sin\alpha\cos\alpha+\cos^2\alpha=\frac{9}{5}$，

又 $4\sin^2\alpha+4\sin\alpha\cos\alpha+\cos^2\alpha=\frac{4\sin^2\alpha+4\sin\alpha\cos\alpha+\cos^2\alpha}{\sin^2\alpha+\cos^2\alpha}=\frac{4\tan^2\alpha+4\tan\alpha+1}{\tan^2\alpha+1}$，

所以 $\frac{4\tan^2\alpha+4\tan\alpha+1}{\tan^2\alpha+1}=\frac{9}{5}$，解得：$\tan\alpha=\frac{2}{11}$ 或 -2，又 $\alpha\in(\frac{\pi}{2},\pi)$，所以 $\tan\alpha<0$，故 $\tan\alpha=-2$.

答案：A

【反思】已知 $A\sin\alpha+B\cos\alpha=C$ 这类式子，尽管可以和 $\sin^2\alpha+\cos^2\alpha=1$ 联立求解 $\sin\alpha$ 和 $\cos\alpha$，但若数字较复杂，则计算量大；通过平方，再化正切也是一个可以考虑的方向.

【变式 4】（2019·江苏卷）已知 $\frac{\tan\alpha}{\tan(\alpha+\frac{\pi}{4})}=-\frac{2}{3}$，则 $\sin(2\alpha+\frac{\pi}{4})$ 的值是_____.

解法 1：注意到 $(\alpha+\frac{\pi}{4})-\alpha=\frac{\pi}{4}$ 为特殊角，$(\alpha+\frac{\pi}{4})+\alpha=2\alpha+\frac{\pi}{4}$ 为欲求值的角，所以可将 $\alpha+\frac{\pi}{4}$ 整体处理，

设 $\alpha=x$，$\alpha+\frac{\pi}{4}=y$，则 $y-x=\frac{\pi}{4}$，所以 $\sin(y-x)=\sin y\cos x-\cos y\sin x=\frac{\sqrt{2}}{2}$ ①，

由题意，$\frac{\tan x}{\tan y}=-\frac{2}{3}$，所以 $\frac{\sin x\cos y}{\cos x\sin y}=-\frac{2}{3}$ ②，

联立①②解得：$\sin x\cos y=-\frac{\sqrt{2}}{5}$，$\cos x\sin y=\frac{3\sqrt{2}}{10}$，

所以 $\sin(2\alpha+\frac{\pi}{4})=\sin(x+y)=\sin x\cos y+\cos x\sin y=-\frac{\sqrt{2}}{5}+\frac{3\sqrt{2}}{10}=\frac{\sqrt{2}}{10}$.

解法 2：先把 $\tan(\alpha+\frac{\pi}{4})$ 展开，由已知条件可求出 $\tan\alpha$，所以将 $\sin(2\alpha+\frac{\pi}{4})$ 展开，化正切计算，

因为 $\tan(\alpha+\frac{\pi}{4})=\dfrac{\tan\alpha+\tan\frac{\pi}{4}}{1-\tan\alpha\tan\frac{\pi}{4}}=\dfrac{\tan\alpha+1}{1-\tan\alpha}$，所以 $\dfrac{\tan\alpha}{\tan(\alpha+\frac{\pi}{4})}=\dfrac{\tan\alpha}{\frac{\tan\alpha+1}{1-\tan\alpha}}=\dfrac{\tan\alpha(1-\tan\alpha)}{\tan\alpha+1}=-\frac{2}{3}$，

解得：$\tan\alpha=-\frac{1}{3}$ 或 2，而 $\sin(2\alpha+\frac{\pi}{4})=\sin 2\alpha\cos\frac{\pi}{4}+\cos 2\alpha\sin\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}(\sin 2\alpha+\cos 2\alpha)$ ①，

又 $\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha=\dfrac{2\sin\alpha\cos\alpha}{\cos^2\alpha+\sin^2\alpha}=\dfrac{2\tan\alpha}{1+\tan^2\alpha}$，$\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha=\dfrac{\cos^2\alpha-\sin^2\alpha}{\cos^2\alpha+\sin^2\alpha}=\dfrac{1-\tan^2\alpha}{1+\tan^2\alpha}$，

代入式①可得 $\sin(2\alpha+\frac{\pi}{4})=\frac{\sqrt{2}}{2}(\dfrac{2\tan\alpha}{1+\tan^2\alpha}+\dfrac{1-\tan^2\alpha}{1+\tan^2\alpha})$ ②，

将 $\tan\alpha=-\frac{1}{3}$ 或 2 代入式②可得 $\sin(2\alpha+\frac{\pi}{4})$ 的值均为 $\frac{\sqrt{2}}{10}$，所以 $\sin(2\alpha+\frac{\pi}{4})=\frac{\sqrt{2}}{10}$.

答案：$\frac{\sqrt{2}}{10}$

【反思】本题解法 1 的技巧性偏强，解法 2 则是常规思路，但解出 $\tan\alpha$ 有两个值，计算量稍大，解法 2 中证明了万能公式：$\sin\alpha=\dfrac{2\tan\frac{\alpha}{2}}{1+\tan^2\frac{\alpha}{2}}$，$\cos\alpha=\dfrac{1-\tan^2\frac{\alpha}{2}}{1+\tan^2\frac{\alpha}{2}}$.

强化训练

1.（2022·海口模拟·★）已知 $\cos\alpha=-\frac{4}{5}$，且 $\sin\alpha<0$，则 $\tan\alpha=$（　　）

（A）$\frac{3}{4}$　（B）$-\frac{3}{4}$　（C）$\frac{4}{3}$　（D）$-\frac{4}{3}$

2．（2022 • 南昌三模 • ★★）若角 α 的终边不在坐标轴上，且 $\sin\alpha+2\cos\alpha=2$，则 $\tan\alpha=$（　　）

（A）$\frac{4}{3}$　（B）$\frac{3}{4}$　（C）$\frac{2}{3}$　（D）$\frac{3}{2}$

3．（2022 • 湖北模拟 • ★★）已知 $2\sin\alpha\tan\alpha=3$，则 $\cos\alpha=$_____.

4．（2022 • 上海模拟 • ★★）若 $\sin\theta=k\cos\theta$，则 $\sin\theta\cos\theta=$_____.（用 k 表示）

5．（2022 • 湖南模拟 • ★★）已知 $\sin\alpha+2\cos\alpha=0$，则 $\frac{\cos 2\alpha}{1-\sin 2\alpha}=$_____.

6．（2022 • 四川模拟 • ★★）已知 $\sin\theta=2\cos\theta$，则 $\frac{\sin\theta+\cos\theta}{\sin\theta}+\sin^2\theta=$（　　）

（A）$\frac{19}{5}$　（B）$\frac{16}{5}$　（C）$\frac{23}{10}$　（D）$\frac{17}{10}$

7．（2018 • 新课标Ⅱ卷 • ★★★）已知 $\sin\alpha+\cos\beta=1$，$\cos\alpha+\sin\beta=0$，则 $\sin(\alpha+\beta)=$_____.

8．（★★★）（多选）已知$\alpha\in(0,\pi)$，$\sin\alpha+\cos\alpha=\dfrac{1}{5}$，以下选项正确的是（　　）

（A）$\sin 2\alpha=\dfrac{24}{25}$　　（B）$\sin\alpha-\cos\alpha=\dfrac{7}{5}$　　（C）$\cos 2\alpha=-\dfrac{7}{25}$　　（D）$\sin^4\alpha-\cos^4\alpha=-\dfrac{7}{25}$

9．（2022·湖北四校联考·★★★）若$a(\sin x+\cos x)\le 2+\sin x\cos x$对任意的$x\in(0,\dfrac{\pi}{2})$恒成立，则实数$a$的最大值为_____.